Jeu de Marienbad

Règle du jeu.

On dispose sur plusieurs rangées des jetons. Deux joueurs vont alors jouer chacun leur tour. Chacun peut prendre autant de jetons qu'il souhaite sur une seule rangée. Le joueur qui prend le(s) dernier(s) jeton(s) est déclaré vainqueur de la partie.

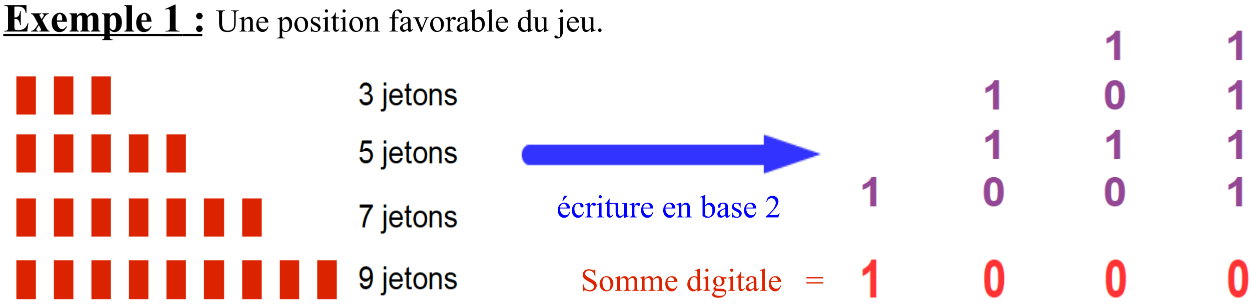
Remarque : Dans la configuration initiale du jeu de Marienbad, les jetons sont disposés en quatre rangées sur lesquels se trouvent 3, 5, 7 et 9 jetons.

Première analyse du jeu.

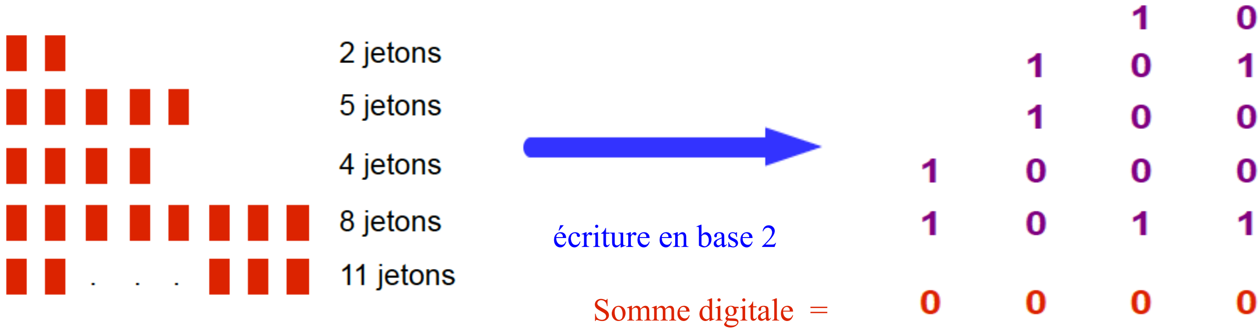
Prenons une disposition quelconque du jeu, c'est-à-dire k rangées dont chacune contient M(1), M(2),...,M(k) jetons. On écrit N(1),N(2),...,N(k) les entiers M(1), M(2),...,M(k) en base 2.

Définition : La somme digitale des entiers N(1),N(2),...,N(k) est obtenue en effectuant la somme en base 2, colonne par colonne, des chiffres de ces entiers, en ne reportant pas les retenues. (Voir exemple 1 et 2 ci-dessous).

Exemple 1 : Une position favorable du jeu.



Exemple 2 : Une position défavorable du jeu.



<u>Définition :</u> La configuration du jeu est dite « favorable » si le résultat de la « somme digitale » est non nul et défavorable sinon.

Le résultat suivant va permettre aux joueurs d'élaborer une stratégie gagnante.

Théorème : *Lorsque avant de jouer, le joueur dispose d'une situation favorable, alors il existe une façon de jouer afin de rendre le jeu dans une configuration défavorable pour l'adversaire. Si la configuration du jeu est défavorable, alors quelque soit la façon de jouer, le joueur offrira une situation favorable à l'adversaire.*

<u>Preuve :</u> Partons d'une situation défavorable du jeu avant de jouer. Le joueur choisit d'enlever un certain nombre de jetons sur la ligne i. L'écriture en base 2 de cette ligne s'en trouve donc modifiée. Considérons C(1),C(2) ..,C(J) les colonnes de la ligne i dont l'écriture en base 2 est changée. Ainsi les 0 (respectivement 1) sont changés en 1(respectivement 0) sur cette ligne i et ces colonnes C(1),C(2) ..,C(J) . Pour une colonne C(I), si un 0 a été transformé en 1, alors on ajoute 1 à la somme digitale qui devient non nulle. Il en est de même si un 1 est transformé en 0. La situation du jeu est donc favorable.

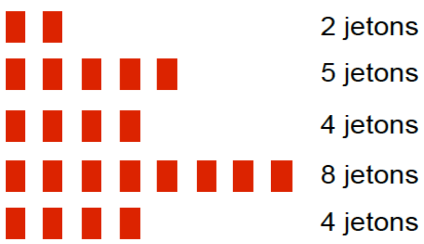
Supposons maintenant que la configuration du jeu avant de jouer soit favorable. Soient C(r), r=1,2,...,J les colonnes indexées de gauche à droite dont le chiffre à la r-ième position de la somme digitale vaut 1(colonne à k lignes). La colonne C(1) contient au moins un 1 (sinon le chiffre de cette colonne dans la somme digitale serait égal à 0). Notons i un indice de ligne de la colonne C(1) pour laquelle un 1 figure sur cette ligne i. Pour aller vers une configuration défavorable, on remplace les 1 par des 0 et les 0 par des 1 de cette ligne i uniquement dans les colonnes C(l), l=1,2,...,k.Cette nouvelle écriture de la ligne i correspond à l'écriture d'un entier en base 2 qui est strictement inférieur à l'entier correspondant avant la modification. Cela tient au fait qu'on a remplacé le 1 tout à fait à gauche dans l'écriture en base 2 par un 0.
Cette nouvelle écriture de la ligne i entraîne que la somme digitale devient nulle. La configuration est alors défavorable.

Conséquence pour le jeu de Marienbad :

Si un joueur, disons le joueur A, dispose d'une situation favorable avant de jouer, alors il est en mesure, d'après le théorème précédent, de rendre une situation défavorable à son adversaire (joueur B); ce dernier, toujours d'après le même théorème et quelque soit sa façon de jouer, rend le jeu dans une position favorable. Ainsi le joueur B dispose toujours d'une situation défavorable et rend le jeu favorable pour le joueur A qui le lui rend défavorable. C'est donc le joueur A qui prend alors le(s) dernier(s) jeton(s).

Lorsque la position de départ est défavorable pour le joueur A, alors il doit espérer que le joueur B lui rende par hasard le jeu dans une situation favorable, il pourra alors appliquer cette stratégie gagnante.

Exemple 3 : Dans cet exemple la configuration initiale est favorable pour le joueur qui va commencer. Nous donnons alors une façon de jouer qui va transformer la configuration favorable en une configuration défavorable.



écriture en base 2

			1	0
		1	0	1
		1	0	0
	1	0	0	0
		1	0	0
Somme digitale =	1	1	1	1

Les 4 colonnes ont une somme digitale non nulle.
La colonne de gauche possède un unique 1 à la ligne 4. On remplace alors les 1(resp. 0) par 0(resp.1) dans la ligne 4.

			1	0	2 jetons
		1	0	1	5 jetons
		1	0	0	4 jetons
	0	1	1	1	7 jetons
		1	0	0	4 jetons
Somme digitale =	0	0	0	0	

Le joueur doit donc enlever un jeton sur la ligne 4.

Remerciement :

Ce papier est largement inspiré des notes du Professeur Loïc Foissy lorsque ce dernier était en poste à l'Université de Reims.